$\text{Sin}^{n-2}(x).\cos(x) = u'(x)$ et $u(x) = \frac{1}{n-1}sin^{n-1}(x)$

$\text{Cos}(x) = v(x)$ et $v'(x) = -\sin(x)$ donc

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}(x)\cos^2(x)dx = \left[\frac{1}{n-1}sin^{n-1}(x)\cos(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{n-1}I_n$$

d'où $I_n = I_{n-2} - \frac{1}{n-1}I_n \Rightarrow I_n\left(1+\frac{1}{n-1}\right) = I_{n-2}$

Par suite $I_n = \frac{n-1}{n}.I_{n-2}$

3-a) $I_{2n} = \frac{2n-1}{2n}.I_{2n-2}$

$I_{2n-2} = \frac{2n-3}{2n-2}.I_{2n-4}$

.

.

.

$I_2 = \frac{1}{2}.I_0$ puisque tous les termes sont non nuls alors en multipliant membre à membre et après simplification on aura :

$$I_{2n} = \frac{(2n-1)(2n-3)(2n-5).....3x1}{2nx(2n-2)x(2n-4)x.....x4x2}.I_0$$

Donc $I_{2n} = \frac{(2n-1)(2n-3)(2n-5).....3x1}{2^n.n!}.\frac{\pi}{2}$

Soit

$$I_{2n} = \frac{2n.(2n-1).(2n-2)..4.3.2.1}{(2.4.6....(2n-2).2n)^2}.\frac{\pi}{2}$$

d'où $I_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}.\frac{\pi}{2}$

Qarray.tn Aqra Blech- Qarray.tn